Experimentelle Untersuchungen

über das

Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung

auf Wasser.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Otto Riess
aus Berlin.

München.
Druck von R. Oldenbourg.
1890.

Experimentelle Untersuchungen

über das

Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung

auf Wasser.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Otto Riess
aus Berlin.

München.
Druck von R. Oldenbourg.
1890.

Referent: **Prof. Dr. Matthiessen.**

Die im Anfang dieses Jahrhunderts von Franz Gerstner aufgestellte Hypothese von der trochoidalen Wellenoberfläche brachte zuerst das Experiment mit der Theorie in annähernde Uebereinstimmung, wie die Gebrüder Weber durch eingehende Untersuchungen nachgewiesen haben[1]). Aus den letzteren ging indessen hervor, dass eine absolute Deckung der berechneten Resultate mit den beobachteten nicht zu erzielen war. Die Art der Versuche erlaubte nicht die erforderliche Genauigkeit, um die Grösse der Abweichungen mit Schärfe festzustellen, und die beiden genannten Physiker schreiben die Differenzen einerseits Mängeln der Theorie, andrerseits den Schwierigkeiten der exacten Messung zu. Bis in die Neuzeit behauptete sich die Gerstner'sche Ansicht, und sie wurde in den Einzelheiten besonders von Stokes, Scott Russell, M. J. Rankine u. A. weiter ausgeführt. Rankine[2]) kommt zu den bekannten Formeln der Gerstner'schen Hypothese durch die Annahme, dass die Wellenform aus der gleichzeitigen Wirkung von Centrifugal- und Schwerkraft resultirt. Ferner nimmt er an, dass die Theilchen, welche sich in einer unendlich dünnen Schicht zwischen zwei Wellenprofilen befinden, stets in derselben bleiben. Die Wellenfläche bildet daher eine Continuitätsfläche, wie auch die neuesten Untersuchungen voraussetzen.

Aber selbst die scharfsinnigsten theoretischen Betrachtungen mussten so lange zu mangelhaften Resultaten führen, als die Unabhängigkeit der Wellenbewegung von der Natur der verschiedenen Flüssigkeiten angenommen wurde. Wenn auch von einigen Forschern bereits auf die Unzulässigkeit dieser Annahme hingedeutet wurde, so war doch

1) Wellenlehre. Leipzig 1825.

2) Philosophical Transactions. 1863 p. 127.

Sir. W. Thomson der erste, welcher im Jahre 1871 den Einfluss der Oberflächenspannung auf die Wellenbewegung in mathematischer Form darlegte [1]), nachdem kurz vorher L. Matthiessen mittels des Experimentes zuerst den Beweis für die Einwirkung molecularer Kräfte erbracht hatte [2]).

I. Das Thomson'sche Gesetz.

Sowohl die Gerstner'sche, als auch die anderen Hypothesen führten als Ausdruck für die Wellengeschwindigkeit auf die Formel:

$$v^2 = n^2\lambda^2 = g\frac{\lambda}{2\pi}, \qquad (1$$

worin v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, n die Wellenzahl pro Secunde, λ die Wellenbreite und g die beschleunigende Kraft der Schwere bedeutete.

Thomson fand

$$v^2 = n^2\lambda^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}T\right), \qquad (2$$

worin v, n, λ dieselbe Bedeutung haben, und T die specifische Oberflächenspannung darstellt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist also eine Function von zwei, voneinander unabhängigen, Kräften g und T.

Eine ausführlichere Ableitung obiger Formel, als von Thomson selbst gegeben, scheint mir angemessen, da die rechnerischen Operationen in dem angeführten Briefe in sehr condensirter Form mitgetheilt sind.

Bei der Ableitung der Gleichung der Wellenlinie gehen wir davon aus, dass eine Molekülreihe unter Einwirkung von Kräften, die jedes Molekül auf die benachbarten ausübt, im Gleichgewicht sei. Die Gleichgewichtslage sei die x-Axe. Es möge dann ein Molekül, z. B. das im Coordinatenanfang befindliche, in der Zeit $\frac{T}{4}$ um die Strecke a aus seiner Gleichgewichtslage verschoben werden, in der Richtung der positiven y-Axe, so wird die Folge sein, dass sich wegen der zwischen den einzelnen Molekülen wirkenden Molecularkräfte nach und nach auch die übrigen Moleküle verschieben; es wird eine Wellenbewegung entstehen. Ist die Kraft, mit der ein Molekül seiner Gleichgewichtslage

1) The influence of wind on waves in water supposed frictionless. (Letter to Prof. Tait.) Phil. Mag. 1871 p. 368.

2) Pogg. Ann. Bd. 134 S. 107, 1868. Pogg. Ann. Bd. 141 S. 375, 1871.

wieder zustrebt, proportional dem Abstand von derselben, so ist die Gleichung der Wellenlinie

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \tag{3}$$

worin bezeichnet: a die Amplitude, y die Elongation, t die vom Beginn der Bewegung verflossene Zeit, T die Schwingungsdauer, x die Entfernung des beobachteten Moleküls vom Ausgangspunkt der Bewegung und λ die Wellenlänge.

Thomson nimmt die x-Axe vertical nach unten, die y-Axe horizontal, setzt

$$\lambda = \frac{2\pi}{n}, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{T},$$

und findet bei Verschiebung des Coordinatenanfangs um $\frac{\lambda}{2}$

$$x = h \sin n\ (y - \alpha t). \tag{4}$$

Weiter macht er die Voraussetzung, dass die Amplitude unendlich klein gegen die Wellenlänge sei, und erhält die x-Componente der Moleculargeschwindigkeit durch Differentiation nach x

$$-n\alpha h \cos n\,(y - \alpha t). \tag{5}$$

Wir nehmen nun die Flüssigkeit als nur von ebenen Wellen durchzogen an, d. h. die Verschiebung der Theilchen nach der z-Axe sei gleich Null.

Allgemein lauten die Differentialgleichungen der Hydromechanik:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X - \frac{dp}{dx}, \\ \frac{\varepsilon d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon Y - \frac{dp}{dy}, \\ \frac{\varepsilon d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon Z - \frac{dp}{dz}, \end{aligned} \tag{6}$$

worin ε die Dichte und p den Druck bezeichnet.

Versteht man unter der Continuitätsgleichung den Ausdruck, welcher die Beziehungen von Dichtigkeit und Volumen zu jeder beliebigen Zeit angibt, so ist

$$\frac{d(\varepsilon d V)}{dt} = 0. \tag{7}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} d V + \frac{d(d V)}{dt} \cdot \varepsilon = 0. \tag{8}$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{d(dV)}{dV} = 0. \tag{9}$$

Das zweite Glied stellt die räumliche Dilatation dar. Im allgemeinen wird bei homogener Deformation aus einer infinitesimalen Kugel ein infinitesimales Ellipsoid entstehen; und zwar an jeder Stelle im Körper dasselbe Ellipsoid.

Also

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \text{räumliche Dilatation} = 0.$$

Bezeichnen $u_1 v_1 w_1$ die Componenten der Verrückungen der unendlich kleinen Kugel, so ist

$$\text{die räumliche Dilatation} = \frac{\delta u_1}{\delta x} + \frac{\delta v_1}{\delta y} + \frac{\delta w_1}{\delta z}$$

und die Continuitätsgleichung wird

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta u_1}{\delta x} + \frac{\delta v_1}{\delta y} + \frac{\delta w_1}{\delta z} = 0 \tag{10}$$

worin $u_1 = u\,dt$, $v_1 = v\,dt$, $w_1 = w\,dt$.

Auch ist

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + dt\left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}\right) = 0$$

ein Ausdruck für die Unveränderlichkeit der Masse.

Im gegebenen Fall, d. h. für Wasser nehmen wir die Dichtigkeit ε überall als constant an, deshalb

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0. \tag{12}$$

Setzt man die Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen als rotationslos voraus, so ist ein Geschwindigkeitspotential Φ zulässig. Dann sind die Geschwindigkeitscomponenten eines Moleküls nach der x- und y-Axe bezüglich die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x} \text{ und } \frac{\delta \Phi}{\delta y}$$

Die Bedingung der rotationslosen Bewegung drückt sich aus durch die Gleichungen [1]):

1) Rausenberger, Analytische Mechanik. Bd. 2 §§ 82 und 83.

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta y},$$
$$\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta z},$$
$$\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{\delta w}{\delta x},$$

und es ist

$$u = \frac{\delta \Phi}{\delta x},$$
$$v = \frac{\delta \Phi}{\delta y}, \qquad (13$$
$$w = \frac{\delta \Phi}{\delta z},$$

Wird Gl. 12 in Gl. 13 eingesetzt und berücksichtigt, dass $\frac{\delta w}{\delta z}$ verschwindet, so kommt

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} = 0. \qquad 14)$$

Φ ist eine periodische Function von y und x. Sie wird Null für $x = \infty$, und hat die Form. $P \cos (ny - e) \varepsilon^{-nx}$, wo P und ε unabhängig sind von x und y.

Differenzirt nach x_1, und x gleich Null gesetzt gibt

$$- Pn \cos (ny - e) = - n\alpha h \cos (ny - n\alpha t). \qquad (15$$

Hiermit ist die Gleichsetzung der aus Wellengleichung und Geschwindigkeitspotential folgenden Geschwindigkeitscomponenten nach der x-Axe erfolgt.

$$P = \alpha h, \quad e = n\alpha t,$$

so dass

$$\Phi = \alpha h \varepsilon^{-nx} \cos n (y - \alpha t). \qquad (16$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass das Wasser reibungslos ist, sich in der durch Gl. 1 gegebenen Weise bewegt und im Anfang in Ruhe war. Für die bewegte Luft erhält man eine ähnliche Function

$$\psi = (V - \alpha) h \varepsilon^{nx} \cos n (y - \alpha t) + Vy \qquad (17$$

worin V die constante Windgeschwindigkeit über dem Wasser bedeutet. Wie beim Wasser wird vorausgesetzt, dass die Luft reibungslos und ohne Drehung der Moleküle sich fortbewegt. Ihre Geschwindigkeit soll grösser als die Wellengeschwindigkeit sein.

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = (V - \alpha) n h \varepsilon^{nx} \cos n (y - \alpha t)$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta y} = -(V - \alpha)\, n h \varepsilon^{nx} \sin n (y - \alpha t) + V.$$

Ist q die resultirende Windgeschwindigkeit an irgend einem Punkt, so findet man unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$\tfrac{1}{2} q^2 = \tfrac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta \psi}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \psi}{\delta y} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{V^2}{2} - V(V - \alpha)\, n h \varepsilon^{nx} \sin n (y - \alpha t). \qquad (18$$

Bezeichnet p den Druck in irgend einem Punkt der Luft, und σ die Dichtigkeit derselben, so findet man für den Druck in einer rotationslosen Flüssigkeit mit Hülfe der Gl. 6, wenn $\varepsilon = \sigma$, $x = g$, $y = 0$

$$\sigma \frac{d^2 x}{dt^2} = \sigma g - \frac{dp}{dx}, \qquad (19$$

$$\sigma \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dp}{dy},$$

$$\sigma \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 g}{dt^2} dy \right) = \sigma g\, dx - dp$$

$$\sigma \int \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy \right) = \sigma g x - p + C, \qquad (20$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t}, \qquad (21$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t} + \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta v}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t}.$$

Hierin ist

$$u = \frac{\delta \psi}{\delta x}, \qquad v = \frac{\delta \psi}{\delta y}.$$

$$\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{\delta \frac{\delta \psi}{\delta t}}{dx} dx + \frac{\delta \frac{\delta \psi}{\delta y}}{dy} dy =$$

$$= d \left\{ \left(\frac{\delta \psi}{\delta t} \right) + \tfrac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta \psi}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta \psi}{\delta y} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\sigma \left(\frac{\delta \psi}{\delta t} + \tfrac{1}{2} q^2 - g x \right) = C - p. \qquad (22$$

Mit Bezug auf Gl. 17 und 18 geht diese Gleichung für $C = {}^1/_2\,\sigma V^2$ über in

$$-p = \sigma\,[-nh\,(V-\alpha)^2\,\varepsilon^{nx}\sin(y-\alpha t) - gx]. \qquad (23$$

Ist p^1 der Druck in einem Punkt des Wassers, so ist, da $\sigma = 1$ und q^2 unendlich klein,

$$-p^1 = -nh\alpha^2\varepsilon^{-nx}\sin n\,(y-\alpha t) - gx. \qquad (24$$

Allgemein ist nun die Krümmung einer Oberfläche

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2$ nach unserer Annahme als unendlich klein der zweiten Ordnung vernachlässigt, gibt als Ausdruck für die Krümmung

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -nh^2\sin n\,(y-\alpha t), \qquad (25$$

und für jeden Punkt gilt, wenn T^1 die Spannung in der Trennungsschicht von Luft und Wasser bedeutet

$$\frac{p-p^1}{T^1} = n^2 h\sin n\,(y-\alpha t) \qquad (26$$

$$p-p^1 = h\left\{n\,[\sigma\,(V-\alpha)^2+\alpha^2] - g\,(1-\sigma)\right\}\sin n\,(y-\alpha t). \qquad (27$$

Aus Gl. 26 und 27 folgt

$$n\,[\sigma\,(V-\alpha)^2+\alpha] - g\,(1-\sigma) = T^1 n^2.$$

Es war $\alpha = \dfrac{\lambda}{T} = n\lambda.$

α bedeutet also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, wenn $V =$ Null gesetzt wird.

Für α gleich v wird

$$v^2 = \frac{g\,(1+\sigma) + T^1 n^2}{(1+\sigma)\,n}. \qquad (28$$

Hierin ist für gewöhnliche Temperatur $\sigma = 0{,}00122$.

Es sei

$$g^1 = g\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right) \backsim g$$

und da

$$n = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ und } T^1 = g\,I,$$

so folgt

$$v^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} T\right),$$

d. h. der mit Gl. 2 bezeichnete Werth.

T ist nach Versuchen von Gay-Lussac[1]) = 0,074 in Centimetergrammen.

II. Discussion des Thomson'schen Gesetzes und der experimentellen Untersuchungsmethoden desselben.

Es ist ersichtlich, dass nach Thomson die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einen Minimalwerth hat, welcher sich durch Differentiation nach λ ergibt

$$\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi g}{\lambda^2} T = 0.$$

$$\lambda = 2\pi\sqrt{T} = 1{,}709 \text{ cm und}$$
$$v = 23{,}11 \text{ cm}$$
$$n = 13{,}52 \text{ cm}$$

23,11 cm ist hiernach die kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wasserwelle. Wellen, deren Breite unter 1,709 cm bleibt, nennt Thomson „ripples", während dieselben von Scott Russell[2]) „Capillarwellen" oder „Wellen dritter Ordnung", und die, welche wesentlich von dem ersten Theil des Formelwerthes abhängen, „Wellen zweiter Ordnung" genannt wurden. Klarer noch scheint die Eintheilung der Wellen nach den wirkenden Kräften, dargestellt durch die Constitution der Formel. Danach hängen ab: Wellen dritter Ordnung wesentlich von der Oberflächenspannung, und ihre Wellenlänge erstreckt sich bis etwa 0,5 cm, Wellen zweiter Ordnung von Oberflächenspannung und Schwere mit der oberen Grenze $\lambda = 10$ cm, und Wellen erster Ordnung wesentlich von der Schwere mit λ grösser als 10 cm. Scott Russell hat die Bildung der „Capillarwellen" im Freien sorgfältig beobachtet und den tiefgehenden Unterschied zwischen ihnen und grossen Wellen treffend dahin charakterisirt, dass eine Welle dritter Ordnung sich nur unter dem continuirlich wirkenden Einfluss einer rein äusseren Kraft erhalten könne und sofort erlischt, wenn die letztere zu wirken aufhört, während die Welle zweiter Ordnung, wenn einmal erregt, unter dem Einfluss der Schwere allein fortschreitet.

1) Die Versuche finden sich in Laplace, Mécanique céléste. Supplement à tome X.

2) Report on waves. British Association. York 1844.

Thomson hatte Gelegenheit im Sound of Mull in Gegenwart von v. Helmholtz die Richtigkeit seines Gesetzes zu prüfen [1]). Der Versuch soll kurz mitgetheilt werden, weil die Art desselben die durch eingehendere Untersuchung gefundenen Differenzen nicht klar zu Tage treten lassen konnte.

Für λ ergibt die Formel eine quadratische Gleichung; es müssen daher für jede Geschwindigkeit — das Minimum derselben ausgenommen — zwei verschiedene λ, den beiden Wurzeln entsprechend, existiren. Thomson zog zur Demonstration dieses analytischen Resultates eine am Ende beschwerte Angelschnur durch das Wasser. Vor der Schnur bildete sich eine Gruppe kleiner Wellen aus, welche hyperbelartig verliefen und in ihrer Länge die kleinere Wurzel darstellten; hinterher lief, die grössere Wurzel verkörpernd, eine längere Welle. Die Schnur wurde seitwärts von einem Boot ausgebracht, um die Wellenbildung nicht zu stören. Gleichzeitig mass Thomson die Bootsgeschwindigkeit durch ausgeworfene, angefeuchtete Papierschnitzel, welche eine durch am Boot befestigte Visirlatten markirte Entfernung von 912 cm in gewisser Zeit passirten. Die Bootsgeschwindigkeit wurde derartig regulirt, dass die zwischen den beiden Wellensystemen sich ausbildenden Wellen der Minimalgeschwindigkeit deutlich hervortraten. Dieselben breiten sich nahezu parallel in schiefer Richtung zur Bootslängenaxe aus. Die Geschwindigkeitscomponente v_0 des Bootes, parallel zu dem Wellenstrahl dieses Systems, musste die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit v sein. Denn $v_0 = v \sin \alpha$, wenn α der Winkel ist, welchen der Wellenzug mit der Fahrrichtung macht. Thomson schätzte denselben durch Einvisiren in die Schenkel eines mit der Hand gehaltenen, durch Scharniere verbundenen Zollstabes. Die graphische Darstellung gab folgende Resultate, nachdem zwei Versuche als misslungen verworfen wurden.

Bootsgeschwindigkeit v	Berechnetes Minimum der Wellengeschwindigkeit v_0
51 cm per Secunde	23,0 cm per Secunde
38 „ „ „	23,8 „ „ „
26 „ „ „	23,2 „ „ „
24 „ „ „	22,9 „ „ „
	Mittel 23,22 cm per Secunde

1) Waves under motive power of gravity and cohesion jointly, without wind. Phil. Mag. 1871 p. 374.

Vergleicht man dieses Resultat mit dem theoretischen Werth, so ist die Uebereinstimmung überraschend. Die geschilderte Messungsmethode kann selbstverständlich auf wissenschaftlichen Werth keinen Anspruch machen, und es schien daher erwünscht, das wichtige Problem auf strengerem Wege in seine Einzelheiten zu verfolgen.

L. Matthiessen hatte mit Hilfe von schwingenden Platten bereits Wellenmessungen vorgenommen und dann im weiteren Verfolg seiner Forschungen den erfolgreichsten Weg eingeschlagen, indem er stehende, durch Stimmgabeln erregte Wellen beobachtete [1]). Lord Rayleigh versuchte ebenfalls durch schwingende Platten dasselbe zu erreichen [2]). Eine Platte wurde mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht bedeckt und in der Mitte an einem schwingenden Stab befestigt. Durch die grosse Reibung wurden jedoch die Abmessungen der stehenden Wellen bedeutend modificirt. Um dies zu umgehen, beobachtete er fortschreitende Wellen. Die Resultate waren zwar besser und gaben hinreichende Uebereinstimmung mit der Formel, aber die Beobachtung setzt voraus, dass das Auge dem schnell fortschreitenden Wellenzuge zu folgen hat, was bei der Kleinheit der Wellen hohe Anforderungen an die Geschicklichkeit des Experimentirenden stellt. Lord Rayleigh äussert sich selbst in diesem Sinne.

Auf Veranlassung des Herrn Prof. Dr. Matthiessen suchte A. Ahrendt [3]) genauere Daten zu gewinnen auf einem Wege, den schon Matthiessen selbst beschritten hatte [4]).

In einem austretenden Flüssigkeitsstrahl erregt eine eingetauchte scharfe Spitze ein deutliches System feiner, stehender Wellen, die sich nach der Ausflussöffnung hin erstrecken. Die Länge der Wellen ist eine Function der Ausflussgeschwindigkeit.

Ist h die Höhe der Flüssigkeitssäule im Gefäss, so ist

$$h\,\lambda = \text{const.}$$

Die Resultate bestätigten wohl dieses Gesetz, jedoch weichen die erhaltenen Wellenlängen wesentlich von den aus Thomson's Formel berechneten ab, da die Verzögerung in der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen innerhalb des Ansatzstückes der Ausflussöffnung sich als beträchtlich erwies.

In einer soeben veröffentlichten Arbeit [5]) kommt daher Matthiessen wieder auf die Messung der von einer Stimmgabel erregten, stehenden Wellen zurück. Diese Versuche beschäftigen sich im allgemeinen mit

1) Pogg. Ann. Bd. 134 S. 107, 1868.
2) Phil. Mag. 16 S. 50, 1883.
3) Exner's Repert. d. Phys. S. 318, 1887.
4) Pogg. Ann. Bd. 141 S. 385, 1871.
5) Wied. Ann. N. F. Bd. 38, 1889.

Wellen dritter Ordnung auf verschiedenen Flüssigkeiten und zielen darauf hin, durch den Beweis der Richtigkeit des Thomson'schen Gesetzes ein Mittel zur Berechnung der Oberflächenspannung zu geben.

Die Erforschung des wichtigen Gebietes um das Minimum herum von v, und darüber hinaus, war eine dankbare Aufgabe. Gab die Formel im kritischen Punkt genau mit den Experimenten übereinstimmende Resultate, so war ihre Unanfechtbarkeit praktisch wie theoretisch gesichert, denn jede Fehlerquelle musste an der Stelle am deutlichsten zu Tage treten.

Bei der Wahl der Untersuchungsmethode wurden die bisher angewandten einer strengen Kritik unterzogen. Ausser den schon angeführten kamen folgende in Betracht.

Die Gebrüder Weber erhielten stehende Wellen durch gleichzeitigen Fall von Flüssigkeitssäulen in die Enden der von ihnen benutzten Wellenrinne [1]).

M. C. Decharme bediente sich bewegter Luft, welche durch Röhren geblasen wurde, deren untere Oeffnung dicht über der Oberfläche der Flüssigkeit sich befand. Die Reinheit der entstehenden Wellenzeichnung hing nach seiner eigenen Aussage von sehr vielen Factoren ab [2]).

Auch schwingende Membranen hat man zur Wellenbewegung gebraucht. Ihre Kraftleistung ist jedoch zu gering, um bei Constanz der Schwingungszahl grössere Wasserwellen zu erzeugen.

Stimmgabeln scheinen zur Untersuchung am besten geeignet, hauptsächlich weil die Constanz der Schwingungszahl gewährleistet ist. Da aber die Abmessungen der Gabeln mit der sinkenden Schwingungszahl schnell wachsen, konnte nur eine beschränkte Zahl von Gabeln angefertigt werden, und die Herstellung eines Apparates, welcher innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Schwingung hergab, war nothwendig. Die Beschreibung desselben und die durch ihn gewonnenen Resultate folgen in einem andern Kapitel.

III. Versuche mit Stimmgabeln.

Für die Messung der durch schwingende Stimmgabeln hervorgerufenen Wellen gibt es zwei Methoden:

1. Beobachtung der stehenden Inferenzwellen,
2. Beobachtung der primären, fortschreitenden Wellen.

1) Wellenlehre. Leipzig 1825.

2) Journal de physique. S. 207, 1875.

Da die zweite Methode nur für kleinere Geschwindigkeiten sichere Resultate gibt, war die Beschränkung auf die erstere gerechtfertigt, nachdem Controlversuche die Uebereinstimmung beider dargethan hatten.

Zur Erzeugung der Wellen wurden an den Zinken mittels Wachs Erregungsstifte aus Aluminium befestigt. Fig. 1 zeigt die Form der Stifte *s*. Die Diagonalstrebe dient dazu, dem System grössere Steifheit zu geben. Bei längeren Wellen wird die mit dem Stiel eingeklemmte Gabel tiefer in das Wasser gesenkt, so dass die Platten etwa 2—4 mm tauchen. Versetzt man die Gabel in Schwingungen, so erblickt man auf der Wasseroberfläche das bekannte Bild zweier interferirender Kreiswellensysteme, welche auf der Verbindungslinie der Erregungscentra die stehenden Wellen als scharf ausgeprägte Rippungen zeigen.

Fig. 1.

Um einwurfsfreie Beobachtungen zu erhalten, handelt es sich um eine möglichst genaue Bestimmung der Schwingungszahlen, wenn sich die Stifte im Wasser befanden.

Für die Versuche standen fünf von Appunn in Hanau gefertigte Stimmgabeln zur Verfügung. Dieselben waren abgestempelt mit den Schwingungszahlen 64, 32, 31, 16 und 8. Bei diesen niedrigen Werthen war die graphische Bestimmungsmethode die geeignetste, um die Angaben zu controliren.

Nachdem im physiologischen Institut der Universität Rostock eine Präliminarbestimmung vorgenommen war, wurden diese Versuche in eingehender Weise wiederholt, und zwar mit einem vom Mechaniker H. Westien angefertigten Kymographen, dessen Construction für die Zwecke dieser Untersuchungen besonders angepasst war.

Auf der folgenden Seite ist in Fig. 2 der Kymograph in Grundriss und Seitenansicht dargestellt. In der Zeichnung sind einige sich entsprechende Theile fortgelassen, um die Uebersichtlichkeit nicht zu stören.

Der Apparat besteht aus einer starken, gusseisernen Platte *F*, welche durch eine Libelle und die Stellschrauben *Q* horizontal eingestellt wird. Darüber lagert ein gusseiserner Rahmen *R*, der durch die drei Säulen *W* fest mit *F* verbunden ist. Zwischen beiden Rahmen befinden sich fünf hohle Messingcylinder *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, welche vorzüglich centrirt sind, um die Reibung bei der Rotation auf ein Minimum herabzudrücken. Die Cylinder *B*, *C*, *D*, *E* haben an der unteren Fläche zur Führung des Papiers einen 5 mm vorstehenden Rand, welcher bei *A* auf 45 mm wächst, um einer Papierrolle ohne

Ende als Unterlage zu dienen. Werden die fünf Cylinder in der durch die Pfeile angegebenen Richtung in Rotation versetzt, so wickelt sich das Papier von *A* ab, läuft über *B* und *C* nach *D*, erhält zwischen

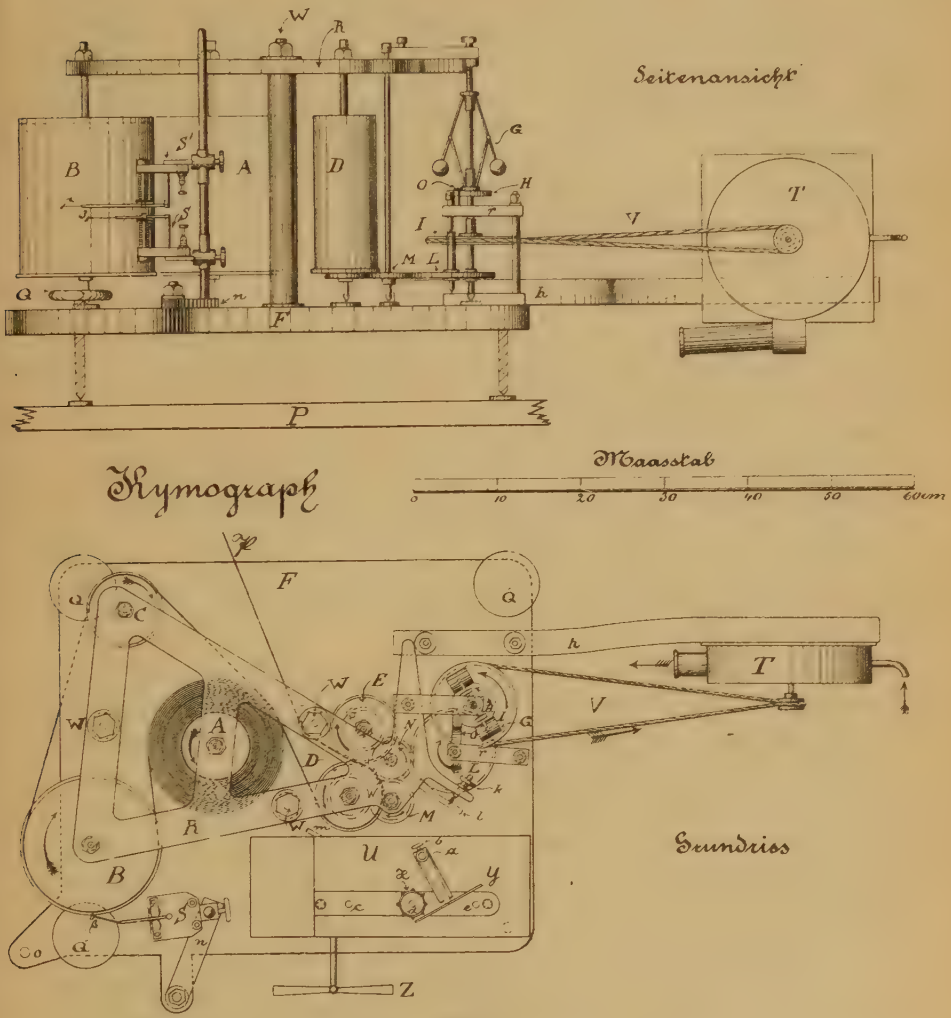

Fig. 2.

D und *E* durch einen einfachen Apparat die nöthige Spannung und fällt dann in einen unter dem Tische P aufgestellten Kasten.

Die Spannung des Papiers P wird erzielt dadurch, dass *E* mit seiner Achse durch den an der festen Achse des Zahnrades *N* befestigten Hebel *l* beweglich ist. Je nachdem man die Schraube *K* anzieht, presst die daran befindliche kleine Feder den Cylinder *E* mehr oder weniger gegen *D*. Im letzteren Falle kann das Papier P

der kleineren Reibung wegen schneller durchlaufen und erhält geringere Spannung.

Die Betriebskraft lieferte die Wasserleitung, welche die an dem Arm h befestigte Turbine T in Drehung versetzte. Der Schnurlauf V dreht dann die Scheibe J; dadurch wird ein an derselben Achse befindliches kleines Zahnrad ebenfalls gedreht, dies nimmt das Rad Z mit, welches seinerseits mit N in Eingriff ist. Durch N erfolgt die Rotation von E, M und D, wie die Zeichnung veranschaulicht. Sollte die Rotation zu schnell erfolgen, so hebt der Regulator G die Platte H, und presst sie gegen die am Arm r befestigte Frictionsbremse O, wodurch der Gang sofort verlangsamt wird.

Vor dem Schreibcylinder B befindet sich auf einer durch den beweglichen Eisenschuh n verschiebbaren, senkrechten Achse ein Elektromagnet S, welcher auf seiner Ebonitplatte zwei Klemmschrauben trägt. S lässt sich auf der Achse beliebig in verticaler Richtung verschieben. Der Anker besteht aus einer eisernen Telephonmembran, welche einen sehr zierlichen, aus Aluminium hergestellten langen Hebel mit in Schwingungen versetzt. Der Hebel trägt vorn eine Westien'sche Feder β, welche sich ausgezeichnet bewährt hat [1]).

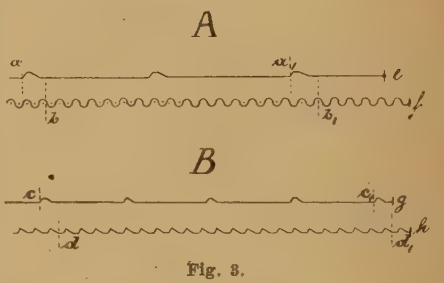

Fig. 3.

Der Elektromagnet S stand in Verbindung mit einer astronomischen Uhr, deren Pendel durch einen Quecksilbercontact schlug. Ein Daniell genügte, um durch β auf den rotirenden Cylinder B eine Figur zu schreiben, wie die Skizzen A und B (Fig. 3) für aa_1 und cc_1 zeigen. Aus beiden geht hervor, dass im ersteren Falle das Papier sich schneller abwickelte, da die Strecke zwischen zwei Unterbrechungen grösser ist.

Will man nun die Schwingungszahl einer in der Luft schwingenden Stimmgabel bestimmen, so klemmt man dieselbe derart ein, dass die breite Seite der Zinke horizontal liegt, und befestigt mit Wachs an einer der Zinken ein dünnes Aluminiumblech, welches vorn eine Westien'sche Feder trägt. Die angeschlagene Gabel wird in zarten Contact mit dem sich abrollenden Papier gebracht und beschreibt dann unter oder über dem Schreibstift β eine Curve, wie in Skizze A, wo beispielsweise 8,43 Schwingungen in der Secunde wiedergegeben

1) Eine neue Schreibfeder zum Aufzeichnen genauer und feinster Curven. Pflüger's Archiv für die gesammte Physiologie, 1881 S. 571.

sind. Hört die Gabel sichtlich auf zu schwingen, so wird die Turbine T abgestellt.

Bei diesen Versuchen ist zweierlei zu beachten. Erstens muss man stets $2\,n$ Secunden zählen, um jeden Fehler in den Längen zweier auf einander folgender Secunden auszugleichen, da der Contactstift des Pendels die Kuppe des Quecksilbers auf einem Hin- und Hergang nicht ganz symmetrisch durchschlägt. Zweitens ist immer von dem Schlusspunkt ab die Zählung zu rechnen. Denn da sich der Schreibstift der Gabel im Anfang des Versuches nicht in einer Senkrechten mit β befindet, so wird diese relative Verschiebung sich bei dem Aufhören der Papierabwicklung durch die noch immer stattfindenden kleinen verticalen Hin- und Hergänge der Federn auf dem Papier als dickere Streifen markiren. Diese Striche sind in Skizze A durch e und f bezeichnet. Als sich die Feder der Gabel in f befand, war β in e. Zählt man also volle Secunden, so wird in a_1 begonnen und nach links fortgeschritten. Für die Gabel beginnt die Zählung in b, da die horizontale Differenz von a_1 und b_1 genau so gross wie die von e und f ist.

Es ist ersichtlich, dass es theoretisch gleichgültig ist, ob das Papier schnell oder langsam läuft. Denn wird die Schreiblänge der Secunde weiter aus einander gezerrt, so geschieht dasselbe für die gleichzeitige Wanderung der Gabelfeder. Für Stimmgabeln mit höherer Schwingungszahl wird der Apparat in schnellere Rotation versetzt, damit sich die Wellen auf einer Secundenstrecke deutlich zählen lassen.

Sollen die Schwingungen einer mit den Stiften im Wasser schwingenden Gabel constatirt werden, so wird ein zweiter Elektromagnet S^1 umgekehrt auf die Säule geschoben (siehe Seitenansicht), der Papierersparnis wegen, da sich dann die Feder α dicht bei β befindet. Die Gabel steht mit einem Quecksilbercontact in Verbindung. Durch diesen und S^1 geht der Strom von zwei Daniell. Es beschreibt α eine Zeichnung wie dd_1 in Skizze B zeigt (5,5 Schwingungen in der Secunde). Die numerische Auswerthung geschieht wie vorher. In der Zeichnung sind möglichst genau die der Wirklichkeit entsprechenden Grössenverhältnisse festgehalten.

Mittels eines Boxchronometers des hiesigen Observatoriums wurde die Verzögerung constatirt, welche die astronomische Uhr durch die Befestigung des Platinstiftes und die Contactvorrichtung erlitten hatte. Dieselbe betrug zwei Secunden auf 72000 Secunden. Da sich aber eine Zählung nur über 20 Secunden ausdehnte, konnte die Correction der Secunde vernachlässigt werden.

Zur Berücksichtigung von Temperatureinflüssen wurden im April 1889 einige Versuche kurz nach Sonnenaufgang angestellt. Die Zimmertemperatur betrug 5° C. Am Nachmittag wurde das Zimmer

sehr stark geheizt und bis auf 30° C gebracht. Die Bestimmung für die Differenz von 25° C musste genügen, da ein besonderer Apparat zur Erwärmung der Gabeln nicht zur Verfügung stand. Aus einer gütigen Mittheilung der physikalisch-technischen Reichsanstalt konnte ich jedoch ersehen, dass die Aenderung der Schwingungszahlen proportional der Temperatur erfolgt. Mit Hilfe der Zahlen für die obige Temperaturdifferenz sind die Schwingungszahlen bis 80° C bestimmt. Die Nothwendigkeit dieser Rechnung wird sich später ergeben.

In den folgenden Tabellen finden sich diese Resultate zusammengestellt, und ist dabei zu bemerken, dass für jede Gabel das Mittel aus 2000—10000 gezählten Schwingungen gewonnen ist.

Tabelle I.

Schwingungszahl in Luft von 20° C	Gewichte der Erregungsstifte in g	Schwingungszahlen mit befestigten Stiften in		
		Luft von 20° C	Wasser b. 20° C Lufttemp.	Wasser b. 0° C Lufttemp.
8,443 (8)	1,05	8,425	8,410	8,430
16,350 (16)	0,65	16,310	16,200	16,260
36,937 (32)	0,77	36,807	36,647	36,767
37,267 (31)	0,14	37,163	37,100	37,250
64,720 (64)	0,65	64,630	64,580	64,800

Mit Hilfe der für 25° C Temperaturdifferenz erhaltenen Schwingungszahlen ist noch folgende Tabelle berechnet.

Tabelle II.

Temperatur der Luft	Schwingungszahlen der Gabeln mit Stiften im Wasser				
0°	8,430	16,260	36,767	37,250	64,800
20°	8,410	16,200	36,647	37,100	64,580
40°	8,390	16,140	36,527	36,950	64,360
60°	8,370	16,080	36,407	36,800	64,140
80°	8,350	16,020	36,287	36,650	63,920

Aus Tabelle I geht hervor, dass die von Appunn mit 31 bezeichnete Stimmgabel eine höhere Schwingungszahl als 32 hat.

Eine von Rayleigh gefundene und von L. Mathiessen [1]) auf anderem Wege hergeleitete Formel gibt ein Mittel an die Hand, kleinere Schwingungsdifferenzen sofort bestimmen zu können.

1) Wied. Ann. N. F. Bd. 32, 1887 S. 630.

Schwingen zwei Gabeln isochron, so erregen sie zwei sich durchdringende Wellensysteme, deren Interferenzwellen feststehende Hyperbeln sind. Schwingt jedoch eine Gabel schneller, so wandern nach Lissajous diese Interferenzlinien von der höherschwingenden Gabel zur tiefer schwingenden und zwar mit einer Geschwindigkeit

$$w = \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1}(n - n_1),$$

wo λ und λ_1 die Wellenlängen, $n - n_1$ die Anzahl der Stösse bedeuten.

Beobachtet man die in einer gewissen Zeit eine feine Marke passirenden Rippungen, so ist damit die Anzahl der Stösse, d. h. der Unterschied in der Schwingungszahl gefunden.

Aus Tabelle I, Spalte 4 ergibt sich die Schwingungsdifferenz

$$37{,}100 - 36{,}647 = 0{,}453.$$

Bei dem Controlversuch auf Wasser und Quecksilber erhielt ich

$$(n - n_1) = 0{,}44.$$

Hierin zeigt sich nicht allein der Grad der Genauigkeit in der graphischen Bestimmungsmethode, sondern es ist zugleich nachgewiesen, dass die Gabeln isoperiodische Wellen erzeugen. Denn würden beispielsweise den Schwingungen eine grössere Wellenzahl entsprechen, so wäre

$$w = \alpha \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda - \lambda_1}(n - n_1),$$

was durch das Experiment ausgeschlossen ist.

Die Messung der stehenden Wellen zwischen den Stiften geschah in der Weise, dass die scharfen Spitzen eines geöffneten Stellzirkels mittels einer Universalklemme dicht über den Wasserspiegel gebracht und auf zwei Knotenpunkte genau eingestellt wurden.

Die Einstellung geschah zuerst auf directem Wege, da bei sehr kleinen Wellen das Interferenzbild scharf ausgeprägt ist. Wachsen die Wellen, so wird die Fixirung der Knoten schwieriger.

Ein Kunstgriff half mir über diese Schwierigkeit hinweg. Dicht über der Oberfläche und beinahe die Zirkelspitzen berührend, hielt eine Klemme einen dünnen, metallenen Compensationsstreifen. Die Kante desselben gab ein in der Amplitude vergrössertes, deutliches Spiegelbild der Wellen; die Einstellung der Spitzen konnte so mit grosser Genauigkeit vorgenommen werden.

Eine dritte Methode besteht nach Matthiessen darin, die auf dem Boden des Porzellangefässes in directem Sonnenlicht sich mit überraschender Deutlichkeit zeigenden Wellen zu messen. In diesem Fall müssen die Spitzen die Wasseroberfläche eben berühren. Diese Methode macht aber eine weiter hinten beleuchtete Correctur nothwendig.

Bei Stimmgabel (8) geschah die Erregung durch Auseinanderspreitzen der Zinken, bei den anderen mittels Anschlaghammers, und zwar am unteren Zinkenende zur Verhütung von Obertönen. Besser noch ist eine continuirliche Erregung durch den elektrischen Strom oder nach der Methode von Ewald [1]). Ersteres ist bekannt. Nach der zweiten Methode zieht ein continuirlicher Luftstrom einen an einer der Zinken befindlichen kleinen Kolben in eine Röhre hinein. Die Zinke folgt nur so weit, bis ihre Elasticität die Luftdruckdifferenz überwindet, schnellt etwas zurück, und das Spiel beginnt von neuem. Durch einige Uebung ist es indessen möglich, auch mit Hammererregung bei gleichen Amplituden zu beobachten.

Tabelle III.

n	λ in cm		$\Delta\lambda$	v berechnet in cm		Mittlerer Fehler	
	berechnet	beobachtet		nach Thomson	aus Beobachtung	ein. Beobachtung f	des Resultates F
8,415	2,947	2,764	0,183	24,80	23,26	0,029	0,004
16,215	1,435	1,321	0,114	23,27	21,42	0,009	0,001
36,677	0,739	0,675	0,064	27,10	24,76	0,020	0,009
37,140	0,732	0,670	0,062	27,19	24,88	0,011	0,008
64,635	0.493	0,450	0,043	31,87	29,09	0,005	0,000

Zu diesen ersten Serien von Experimenten wurde destillirtes, ausgekochtes Wasser von 20° C benutzt. Die Lufttemperatur betrug circa 15° C.

Aus der Thomson'schen Formel ergibt sich für die Berechnungen von λ

$$\lambda^3 - 981{,}4\,\frac{\lambda_2}{2\pi n^2} - 981{,}4 \cdot \frac{2\pi T}{n^2} = 0$$

oder

$$\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)^3 + \frac{1}{4\pi^2 T}\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{n^2}{981{,}4 \cdot 2\pi T} = 0.$$

Am einfachsten erhält man die Lösung dieser cubischen Gleichung auf trigonometrischem Wege.

Man setzt

$$tg\,\alpha = \frac{981{,}4}{6\pi n^2}\sqrt{\frac{1}{3\pi^2 T}}$$

1) Pflüger's Archiv für die gesammte Physiologie. Bd. 44 S. 555.

$$tg\,\beta = \sqrt[3]{tg\,\alpha_2},$$

so ist

$$\lambda = \sqrt{3\,\pi^2\,T}\cdot tg\,2\,\beta.$$

Bezeichnen Δ_1, Δ_2 . . . die Differenzen der Einzelbeobachtungen gegen den Mittelwerth, so ist

$$f = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots}{x - 1}}$$

und

$$F = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots}{x\,(x-1)}},$$

wo x die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet.

Aus der Tabelle III geht hervor, dass die Thomson'sche Formel nicht genau mit dem Experiment übereinstimmende Werthe liefert. Die Differenzen sind so bedeutend, dass sie durch Beobachtungsfehler allein nicht zu erklären sind.

Weiter zeigte sich bei einer hellen Sonnenbestrahlung, dass die Wellenlängen sich unter dem erwärmenden Einfluss ändern. Um die Grösse der Veränderung zu bestimmen, wurde die Oberfläche des Wassers einer wenige Secunden dauernden Bestrahlung ausgesetzt, während die Gabel abgeblendet war. Das Thermometer in der Luft dicht über dem Wasser zeigte 32° C. Es ergab sich für $n = 36{,}677$, $\lambda = 0{,}652$ cm.

Die consequente Durchführung dieser Versuche war für die Augen so anstrengend, dass ich davon absah. Bei späteren Gelegenheiten ist der Einfluss der Sonnenbestrahlung in einzelnen Fällen immer wieder constatirt worden. Während das Wasser als Ganzes keine messbare Erwärmung erfährt, kann auf diesem Wege die fast momentane Wärmeabsorption des Oberflächenhäutchens nachgewiesen werden. Daher wurde auf Messung der durch die Sonne am Boden hervorgerufenen Bilder der Wellen verzichtet.

Der Vorgang führte mich auf die Vermuthung, dass der Einfluss der Temperatur auf die Bildung der Wellen beträchtlich ist. Eine umfassende Reihe von Versuchen mit erwärmtem Wasser bestätigte die Annahme.

Das Wasser wurde siedend in das vorgewärmte Gefäss gegossen und die Gabel vorher mit Oel abgerieben, um die Menge des Niederschlagwassers zu reduciren. Wie die folgende Tabelle zeigt, findet bei hohen Temperaturen eine starke Verkleinerung der Wellenlängen statt, die eher um ein Geringes grösser anzuschlagen ist, da sich nicht alle

die Schwingungen der Gabel etwas verlangsamenden, niedergeschlagenen Wassertropfen entfernen lassen.

Zugleich mit der Messung der Wassertemperatur ging die der Gabelumgebung Hand in Hand. Ein Thermometer war am Ende der Zinken, ein zweites am Stiel aufgehängt. Auf das aus beiden gewonnene Mittel beziehen sich die Schwingungszahlen in Tabelle II.

Durch Einbetten des Gefässes in zerstampftes Eis und Kochsalz konnte andrerseits die Wassertemperatur bis auf 0° C herabgedrückt werden.

In Tabelle IV sind die Werthe nach um 20° C steigenden Wassertemperaturen geordnet. Die Temperaturen der Gabeln schwankten von 12° bis 36° C.

Tabelle IV.

Temperatur des Wassers in Celsiusgraden.									
0		20		40		60		80	
n	λ	n	λ	n	λ	n	λ	n	λ
8,418	2,848	8,415	2,764	8,411	2,701	8,405	2,656	8,394	2,628
16,224	1,384	16,215	1,328						
36,695	0,715	36,677	0,675	36,653	0,645	36,617	0,623	36,551	0,608
37,160	0,709	37,140	0,670						
64,668	0,477	64,635	0,450	64,591	0,430	64,525	0,415	64,404	0,404

Wie ersichtlich, sind diese Versuche nur für drei Gabeln vollständig durchgeführt, und zwar an Serien von durchschnittlich 200 Messungen.

Es war mir nicht möglich, zu constatiren, ob bei 4° C, dem Zustand der grössten Dichtigkeit, auch das Maximum der Wellenlänge liegt, denn von diesem Punkt bis 0° war der Unterschied zu gering.

Für den in Bezug auf die Rechnungsresultate der Formel günstigsten Vergleichungsfall, dass T sich auf Null Grad bezieht, gibt Tabelle V eine Uebersicht bezüglich der gefundenen Differenzen.

Tabelle V.

berechnet λ	beobachtet	$\Delta\lambda$
2,947	2,848	0,099
1,435	1,384	0,051
0,739	0,715	0,024
0,732	0,709	0,023
0,493	0,477	0,016

Unverkennbar zeigt die Grösse und Regelmässigkeit der Abnahme dass in der Formel irgendwo eine Ergänzung nothwendig ist.

Da im ersten Theil der Thomson'schen Formel keine durch die Temperatur beeinflusste Grösse vorkommt, so war der Grund der Abweichungen in einer Aenderung der Oberflächenspannung T zu suchen.

Unter dieser Voraussetzung und der weiteren, dass die Entwickelungsprincipien der Formel richtige sind, berechnete ich mit Hilfe der gefundenen Grössen von n und λ aus der Formel die Spannung T und erhielt die in Tabelle VI zusammengestellten Werthe, worin T_0, T_{20} etc. die den Temperaturen entsprechenden Spannungen bedeuten.

Tabelle VI.

λ	T_0	λ	T_{20}	λ	T_{40}	λ	T_{60}	λ	T_{80}
2,848	0,0600	2,764	0,0490	2,701	0,0413	2,656	0,0360	2,628	0,0324
0,715	0,0669	0,675	0,0557	0,645	0,0479	0,623	0,0429	0,608	0,0393
0,477	0,0678	0,450	0,0566	0,430	0,0491	0,415	0,0439	0,404	0,0402

Die graphische Wiedergabe dieser Werthe von T ergab die überraschende Thatsache, dass die darstellende Curve mit grosser Regelmässigkeit verlief.

In Fig. 4 stellen die Ordinaten die verschiedenen Oberflächenspannungen dar, welche sich für Stimmgabel (8) ergaben. Für die beiden

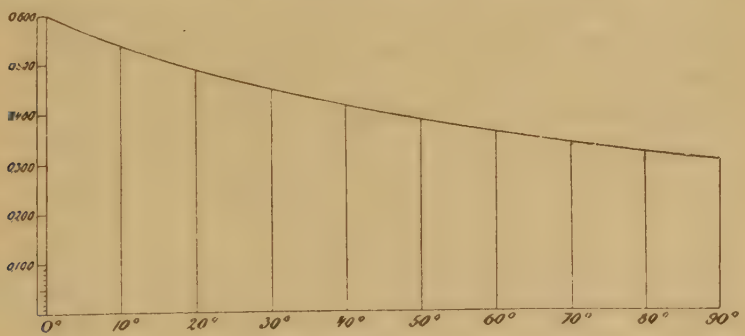

Fig. 4.

anderen Gabeln erhält man fast genau parallele Curven, deren constante Entfernung die Differenz zweier Spannungswerthe bei verschiedenen Temperaturen ist.

Da die Curven keine geraden Linien sind und gegen Null Grad hin verhältnismässig stärker ansteigen, so wurde als Abhängigkeitsgesetz angenommen

$$T_t = T_0 - \alpha t + \beta t^2. \qquad (30$$

Zur Berechnung der Constanten sind für jede Stimmgabel und die Temperaturintervalle 0°, 40° und 80° drei Gleichungen vorhanden. Man erhält schliesslich

$$T_t = T_0 - 0{,}000591\,t + 0{,}0000031\,t^2. \qquad (31$$

Brunner[1]) hat den Einfluss der Temperatur auf die Steighöhen des Wassers in Capillarröhren untersucht, und da die Steighöhe von der Oberflächenspannung abhängt, konnten seine Ergebnisse mit den meinigen zu einem Vergleich herangezogen werden.

Er findet die Steighöhe in einer Röhre von 1 mm Radius für Wasser

$$15{,}33215 - 0{,}0286396\,u,$$

wo u die Temperatur des Wassers in Celsiusgraden bedeutet. Da die Oberflächenspannung für Wasser gleich der halben Steighöhe in Röhren von 1 mm Radius ist, so drückt die Formel, bezogen auf Centimetergramm aus

$$T_t = T_0 - 0{,}000143198\,t.$$

Die Abnahme von T ist also hiernach eine bedeutend geringere, als von mir gefunden.

Brunner's Experimente beziehen sich jedoch auf ruhendes und mit Luft erfülltes Wasser.

Es ergab sich eine beträchtliche Differenz in den Wellenlängen und geringere Abnahme der Spannung mit steigender Temperatur, wenn das Wasser lufthaltig war. Hagen[2]) weist ebenfalls auf diesen Punkt hin und betont, dass ausgekochtes, abgekühltes Wasser eine geringere Capillarität besitzt.

Hiermit stimmen folgende Resultate vollständig überein.

In Tabelle III und IV entspricht

$$n = 64{,}635 \qquad \lambda = 0{,}450 \text{ und}$$
$$n = 36{,}677 \qquad \lambda = 0{,}675$$

wenn sich das ausgekochte Wasser ohne Umrühren langsam bis auf 20° C abkühlt. Erwärmt man jedoch vollkommen mit Luft gesättigtes Wasser bis auf 20° C,

so gibt

$$n = 64{,}635 \qquad \lambda = 0{,}458 \text{ und}$$
$$n = 36{,}677 \qquad \lambda = 0{,}685$$

---

1) Untersuchungen über die Cohäsion der Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 70 S. 518.

2) Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Abhandlungen d. kgl. Akad. d. Wissenschaften. Berlin 1845.

ein Beweis, dass die Spannung erheblich zugenommen hat. Wenn das Wasser ruhig im Freien stand, so dauerte es ca. 24 Stunden, ehe die Wellenlängen die angeführten Werthe erreichten. Die Lösung der Luft erfolgt also sehr langsam bei dickeren Wasserschichten.

Nach Tabelle VI ist T_0 für alle Wellenlängen nicht constant, sondern scheint sich mit $\lambda = 0$ einem Maximum zu nähern. Wird T als eine Function von λ allein angesehen und folgende Relation angenommen

$$0{,}0600 = T_0 - \alpha \cdot 2{,}848^x$$
$$0{,}0669 = T_0 - \alpha \cdot 0{,}715^x$$
$$0{,}0678 = T_0 - \alpha \cdot 0{,}477^x$$

so kann man T_0, α und x bestimmen und findet

$$T_0 = 0{,}070 - 0{,}00411 \cdot \lambda^{0{,}84}. \qquad (32$$

Für 0° C würde daher innerhalb dieses Bereiches die Thomson'sche Formel lauten

$$v^2 = g\left\{\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}(0{,}070 - 0{,}00411\,\lambda^{0{,}84})\right\} \qquad (33$$

und für jede Temperatur

$$v^2 = g\left\{\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}(T_0 - 0{,}000591\,t + 0{,}0000031\,t^2)\right\} \qquad (34$$

Ist in Gl. 33 $\lambda = 28$ cm, so verschwindet die innere Klammer. Nach Thomson würde der Einfluss der Oberflächenspannung bei dieser Wellenlänge nur noch 0,1 cm, d. h. etwa 1/3 Procent betragen.

Für ein unendlich kleines λ wird $T_0 = 0{,}070$. Gewöhnlich wird diese Zahl für Wasser etwas grösser, nämlich 0,074 angegeben; Beer in seiner Theorie der Elasticität und Capillarität hat jedoch denselben Werth.

Der Schwerpunkt für die weiteren Untersuchungen lag darin, wie die Formel mit auf verschiedenen Wegen erhaltenen Wellen, besonders grösserer Länge, übereinstimmte.

III. Versuche mit elektrischen Unterbrechern.

Ausser den im Anfang discutirten Methoden stehende Wellen auf Wasser zu erzeugen, können die periodischen Unterbrechungen eines elektrischen Stromes zur Schwingungserregung nützlich gemacht werden. Dieser Zweck liess sich mit Hilfe simultan schwingender Anker zweier Elektromagneten in folgender Weise erreichen.

Es handelte sich nicht allein darum, Wellenlängen von mehr als 3 cm zu erzielen, sondern vor allen Dingen jede beliebige Schwingungszahl festhalten und registriren zu können. Besonders wünschenswerth war die Untersuchung um das Minimum von v herum, und eine Controle der durch die Stimmgabeln erzeugten Wellen.

Zur Vermeidung erheblicher Beeinflussungen der Wellen durch die Tiefe, wurde das Wassergefäss gross gewählt. Dasselbe ist aus Zinkblech gefertigt und hat bei 32 cm Tiefe einen Durchmesser von 81 cm. Es ist in Fig. 5 mit G bezeichnet. Ueber dies Gefäss kann ein schwerer eiserner Rahmen R, welcher sich durch Stellschrauben f horizontal einschrauben lässt, geschoben werden. Der Rahmen hat bei g eine Einklemmungsvorrichtung für Stimmgabeln und dient gleichzeitig als Träger zweier beliebig verschiebbarer Elektromagneten M. An den Ankern der letzteren ist eine leichte Aluminiumröhre befestigt, die zwischen den Drahtspiralen durch die Ebonitgrundplatte führt. Am unteren Ende derselben werden verschieden geformte Korkplatten als Erreger befestigt. In der oberen Figur ist gezeigt, dass sich die Elektromagneten auch in horizontaler Lage verwenden lassen. Sie werden dann von den Stativen l gehalten, welche gleichzeitig zwei durch Schrauben i beliebig festzuhaltende Messlatten mit den Marken h tragen. Diese Marken h haben unten Stahlspitzen n, welche auf die Knotenpunkte eingestellt werden.

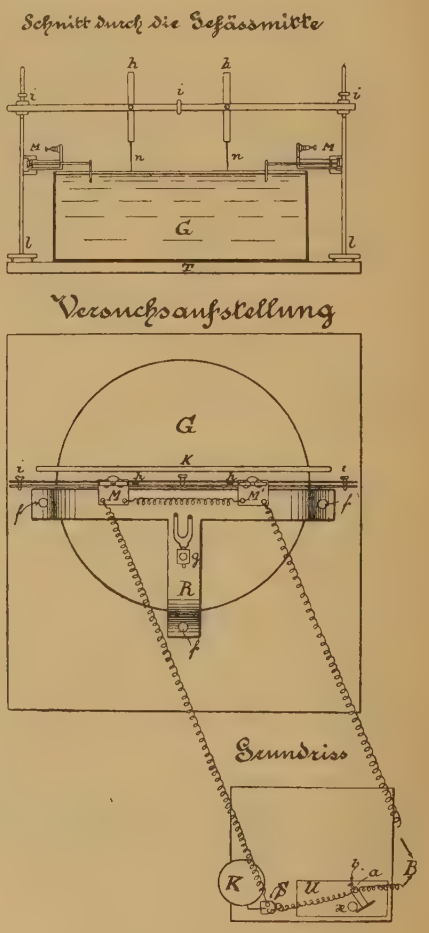

Fig. 5.

Auf den Kymographen K wird ein durch aufgelegte Gewichte regulirbares Uhrwerk U geschraubt. Dasselbe hat drei Achsen c d, e, (siehe Fig. 2) deren Rotationen sich wie 25 : 5 : 1 verhalten. Auf diese Achsen kann ein Elfenbeinscheibchen x, welches mit acht metallenen Contactzähnchen versehen ist, gesetzt werden. Gegen die Zähnchen presst eine

verschiebbare, und mit zwei Klemmschrauben a, b versehene Contactfeder Y. Z ist der Hebel zum Aufziehen des Uhrwerks.

Der Betrieb ist leicht zu übersehen. Von einer Batterie B, aus 4 Bunsen bestehend, geht ein Strom zur Klemmschraube a, durch die Feder Y zur Klemmschraube b und Uhrwerk U. Von diesem zu dem Schreibelektromagneten S und weiter zu M und M^1, von wo der Strom wieder zur Batterie zurückkehrt. S^1 (Fig. 2) schreibt unabhängig davon die Secunden der astronomischen Uhr. Wird das Uhrwerk in Gang gesetzt, so rotirt x, bewerkstelligt die gewünschte Unterbrechungszahl und setzt M und M^1 in Bewegung. Die Excursionen der Anker, und damit die Wellenamplituden lassen sich beliebig variiren. Der Leitungswiderstand für S_1 S^1, M und M^1 ist gleich gewählt.

Sobald das Uhrwerk sich nach einigen Secunden auf eine bestimmte Tourenzahl eingelaufen hat, wird die Turbine in Gang gesetzt, und während S und S^1 die Figur B aufzeichnen, wird zwischen den Spitzen n beobachtet.

Geringe Differenzen in der Schwingungszahl lassen sich am besten durch sanftes Andrücken der Feder Y, grössere durch Auflegen von Gewichten erreichen. Beobachtungen einer und derselben Serie, welche in den Schwingungszahlen in der zweiten Decimale abweichen, wurden verworfen.

Die Tabelle VII gibt die Werthe für n und λ und die Wassertemperatur von 20° C.

Tabelle VII.

Beobachtete		$v = n\lambda$	Mittlerer Fehler einer Beobachtung	T_{20}	T_0	T_0^1	$T_0 - T_0^1$
Schwingungszahl n	Wellenlänge λ		f	berechnet	berechnet aus T_{20} nach $T_{20} + \alpha t - \beta t^2$	berechnet aus $0{,}070 - 0{,}00411\,\lambda^{0{,}84}$	
21,77	1,020	22,21	0,008	0,0552	0,0657	0,0656	+ 0,0001
16,93	1,268	21,47	0,013	0,0543	0,0649	0,0648	+ 0,0001
14,95	1,427	21,33	0,009	0,0538	0,0644	0,0642	+ 0,0002
13,33	1,600	21,33	0,010	0,0532	0,0638	0,0637	+ 0,0001
12,52	1,709	21,40	0,003	0,0529	0,0635	0,0633	+ 0,0002
11,93	1,800	21,47	0,020	0,0526	0,0632	0,0630	+ 0,0002
9,65	2,310	22,29	0,019	0,0510	0,0616	0,0615	+ 0,0001
7,98	2,983	23,80	0,007	0,0489	0,0595	0,0595	—
6,59	4,004	26,39	0,001	0,0459	0,0565	0,0566	— 0,0001
5,63	5,230	29,44	0,028	0,0428	0,0534	0,0533	+ 0,0001
5,33	5,766	30,73	0,029	0,0411	0,0518	0,0519	— 0,0001
5,19	6,044	31,37	0,007	0,0403	0,0510	0,0512	— 0,0002
5,00	6,732	33,66	0,017	0,0391	0,0498	0,0495	+ 0,0003

T_0^1 ist mit Hilfe von λ_1 aus Tabelle VIII berechnet worden.

Die letzte Spalte zeigt eine überraschende Uebereinstimmung mit den aus den Versuchen mit Stimmgabeln gewonnenen Resultaten.

In der Tabelle VIII stellte ich die auf T_0 reducirten Wellenlängen λ_1 d. h. diejenigen, welche man in Wasser von 0° C erhalten würde, den nach Thomson berechneten λ für dasselbe n und $T' = 0{,}074$ gegenüber.

Tabelle VIII.

n	λ berechnet nach Thomson cm	λ_1 wahrschein. beobachtet bei 0° C cm	$\lambda - \lambda_1$ cm	$v = n\lambda$ cm	$v_1 = n\lambda_1$ cm	$v - v_1$ cm
21,77	1,111	1,073	0,038	24,19	23,36	0,83
16,93	1,378	1,331	0,047	23,33	22,53	0,80
14,95	1,549	1,496	0,053	23,16	22,37	0,79
13,33	1,734	1,672	0,062	23,11	22,29	0,82
12,52	1,848	1,783	0,065	23,14	22,32	0,82
11,93	1,955	1,878	0,077	23,32	22,40	0,92
9,65	2,476	2,381	0,095	23,89	22,98	0,91
7,98	3,166	3,064	0,102	25,26	24,45	0,81
6,59	4,195	4,079	0,116	27,65	26,88	0,77
5,63	5,416	5,297	0,119	30,49	29,82	0,67
5,33	5,952	5,828	0,124	31,72	31,06	0,66
5,19	6,228	6,105	0,123	32,32	31,68	0,64
5,00	6,908	6,788	0,120	34,54	33,94	0,60

Mit absoluter Sicherheit in der Regelmässigkeit der Bewegungen konnten die Schwingungen der Elektromagneten nicht über $n =$ ca. 23 forcirt werden, da die in Bewegung gesetzten Massen des Ankers und Erregers immerhin so bedeutend waren, dass die Trägheit einen unbequemen Einfluss zu äussern begann. Andrerseits liessen sich längere Wellen als 7 cm auch nicht erzeugen, denn bei der dazu nothwendigen, stärkeren Erregung machten sich die von den Gefässwänden reflectirten Wellen in sehr störender Weise geltend.

Vergleicht man die Tabelle VIII mit IV und V, so geht zur Evidenz die Gleichartigkeit der Resultate hervor, da in ähnlichen Fällen sich nahezu gleiche Differenzen gegen das theoretische Resultat ergeben.

Weiter sieht man aus den Spalten für v und v_1 in VIII, dass es um das Minimum herum, d. h. etwa für Wellenlängen von 1 cm bis 2,5 cm sehr schwierig ist, auf die Wellenlängen nach beobachteten Geschwindigkeiten zu schliessen, da dieselben sich für dies Gebiet

wenig voneinander unterscheiden, obwohl unverkennbar das Minimum an der von Thomson bezeichneten Stelle liegt.

Thomson's Beobachtungen, welche auf Geschwindigkeitsmessungen basirten, können daher kein absolut verlässliches Material abgeben, um so mehr als sich selbst in den von ihm als glücklich bezeichneten Versuchen für v Unterschiede von 0,9 cm finden. Gerade dieser Unterschied deckt aber vollkommen die von mir auf dem beschriebenen Wege gefundene genaue Differenz.

Um jeden Zweifel auszuschliessen, habe ich im Freien Messungen an noch grösseren Wellen angestellt.

IV. Versuche im Freien.

Die Verwaltung der Wasserwerke in Rostock stellte in liebenswürdiger Weise die grossen Filterbassins für die Untersuchungen zur Verfügung.

Dieselben bilden drei gemauerte, quadratische Bassins von 21,7 m Seitenlängen im Lichten und 3 m Tiefe. Wenn dieselben frisch gefüllt sind, bildet das Wasser eine reine, ruhige Fläche, zu Beobachtungen besonders geeignet, da bei der grossen Tiefe die Wellen durch den Boden fast garnicht beeinflusst sind.

Eine Wellenerregung durch Hineinfallenlassen von schweren Körpern erwies sich als unbrauchbar für den vorliegenden Zweck, da die entstehenden Wellen fortwährend in Länge und Geschwindigkeit wechselten[1]). Am besten schien continuirliche Erregung, indem ein passend befestigter Stab, der in dem Niveau des Wassers eine kleine Platte trug, in Schwingungen versetzt wurde. Es bildeten sich Kreiswellensysteme von grosser Reinheit, welche letztere jedoch nur so lange andauerte, bis der Wellenzug die anderen Seiten des Bassins erreicht hatte; die dann von allen Richtungen reflectirten Wellen störten die Uebersichtlichkeit. Da aber drei Bassins zur Disposition standen, war die Möglichkeit gegeben, ohne auf die gänzliche Beruhigung des einen zu warten, auf der ruhigen Fläche der anderen weiter zu operiren.

Zuerst wurde constatirt, dass jeder ganzen Schwingung thatsächlich eine Welle entsprach. Darauf wurde über die ganze Länge des Bassins ein starker Eisendraht, auf dem an Korkstückchen befestigte kleine, bis unter das Niveau des Wassers hinabreichende Lothe verschiebbar waren, gespannt. Mittels der letzteren liess sich jede beliebige Strecke genau fixiren.

1) E. und W. Weber. Wellenlehre.

Die Schwingungszahlen waren auf Grenzen von $n = 2{,}5$ bis 4,5 beschränkt. Denn für die Ausbildung grösserer Wellen sind selbst diese Bassins noch zu klein, und ferner wird die genaue Beobachtung grösserer Geschwindigkeiten sehr schwierig; endlich liessen sich mit der skizzirten Vorrichtung nur in den angegebenen Grenzen isochrone Schwingungen erzeugen.

Die Beobachtung der Zeiten und Schwingungen geschah mittels Tertienuhren.

Nach mehreren verunglückten Versuchen gelang es durch die Uebung und Einführung einiger Kunstgriffe recht zufriedenstellende Resultate zu erreichen. Herr Cand. Walcker unterstützte mich dabei in dankenswerther Weise.

Aus der Reihe von Versuchen sind analog den Tabellen VII und VIII zwei kleinere zusammengestellt worden.

Die Wassertemperatur schwankte von 17 bis 21° C, wofür der Einfachheit wegen durchgängig 20° C angenommen ist.

Tabelle IX.

Beobachtete Schwingungszahl n	Beobachtete Wellenlänge λ	$v = n\lambda$	Mittlerer Fehler einer Beobachtung f	T_{20} berechnet	T_0 berechnet aus T_{20} nach $T_{20} + \alpha t - \beta t^2$	T_0^1 berechnet aus $0{,}070 - 0{,}00411\,\lambda^{0{,}84}$	$T_0 - T_0^1$
4,26	8,790	37,45	0,012	0,0333	0,0440	0,0444	— 0,0004
3,72	11,391	42,37	0,007	0,0267	0,0373	0,0382	— 0,0009
3,48	12,944	45,05	0,009	0,0228	0,0335	0,0346	— 0,0011
3,00	17,384	52,15	0,012	0,0129	0,0235	0,0247	— 0,0012
2,67	21,915	58,51	0,019	0,0030	0,0138	0,0150	— 0,0012

Tabelle X.

n	λ berechnet nach Thomson cm	λ_1 wahrschein. beobachtet bei 0° C cm	$\lambda - \lambda_1$ cm	$v = n\lambda$ cm	$v_1 = n\lambda_1$ cm	$v - v_1$ cm
4,26	8,938	8,815	0,123	38,08	37,55	0,53
3,72	11,547	11,427	0,120	42,95	42,51	0,44
3,48	13,095	12,978	0,117	45,57	45,16	0,41
3,00	17,520	17,408	0,112	52,56	52,22	0,34
2,67	22,042	21,935	0,107	58,85	58,57	0,28

Zwar sind in Tabelle IX die Differenzen $T_0 - T_0^1$ grösser als in Tabelle VII, dennoch ist die Uebereinstimmung verhältnismässig gut.

Jedenfalls befinden sich diese Versuche in vollkommener Harmonie mit den vorhergehenden. Aus den abnehmenden Differenzen von $\lambda - \lambda_1$ und $v - v_1$ geht hervor, dass bei längeren, vollkommen freien Wellen der theoretische Werth nahezu erreicht werden wird. Dieser theoretische Werth, also wesentlich der erste Theil der Formel, ist zwar nicht ganz genau, da von dem Einfluss der Tiefe vollkommen abgesehen wird.

Giesen [1]) findet

$$v^2 = g \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{-2\pi}{\lambda}h}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{\frac{-2\pi}{\lambda}h}} \right),$$

wo h die Tiefe des Gefässes bedeutet. Ist die Tiefe h sehr gross zur Wellenlänge und Amplitude, so kann der Klammerausdruck allerdings vernachlässigt werden.

Kolacek [2]) hat in ähnlicher Weise wie Thomson den Einfluss der Oberflächenspannung entwickelt und sein Endergebnis so ausgedrückt:

$$4\pi^2 v^2 = \left[\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{-2\pi}{\lambda}h}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{2\pi}{\lambda}h}} \right] \cdot 2\pi\lambda \left(g + \frac{p_1}{\varrho} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right).$$

Hierin bedeutet p_1 das Gewicht der durch die Oberflächenspannung gehobenen Wassersäule, und ϱ die Dichtigkeit des Wassers. Der Einfluss der Oberflächenspannung ist nach ihm gleich einer Vermehrung der Schwerebeschleunigung um $\frac{p_1}{\varrho} \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ zu setzen.

Sieht man in dieser Formel auch von dem Werth der eckigen Klammer ab, so wird nach Kolacek unter Einführung der Thomson'schen Bezeichnung

$$v^2 = g \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda^2} T \right).$$

Zur Prüfung dieser Formel wurde eine Wellenlänge in der Nähe des Minimums herausgegriffen, nämlich $\lambda = 1{,}672$.

Für diese Wellenbreite ist nach

Thomson $n = 13{,}83$
direktem Versuch $n = 13{,}33$
Kolacek $n = 12{,}33$

1) Zeitschrift für Mathematik. 1877 S. 138.
2) Pogg. Ann. 1878 S. 428.

Die Oberflächenspannung scheint daher, abgesehen vom Temperatureinfluss, weder der ersten, noch der zweiten Potenz von λ umgekehrt proportional zu sein.

Thomson und Kolacek gehen von der Annahme aus, dass die Amplituden sehr klein zur Wellenlänge sind, und dass die Oberflächenspannung constant ist. Es liegt aber auf der Hand, dass bei verhältnismässig grossen Amplituden, also bei starker Krümmung der Oberfläche die Oberflächenspannung von Punkt zu Punkt momentanen Aenderungen unterworfen ist; diese Aenderungen rufen die Differenz von Formel gegen Beobachtung hervor. Der Schlüssel für die definitive Lösung ist in einer minutiösen Messung der Amplituden zu suchen; die Ueberwindung der sich darbietenden Schwierigkeiten wird keine leichte sein, aber vielleicht einen Einblick in die Mechanik der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen gewähren. Durch directe Messung habe ich bei einigen Wellenlängen die Amplitude festzustellen versucht, beispielsweise für $\lambda = 2{,}848$ cm, wo als Mittel 1,2 mm sich ergab. Verlässlich kann jedoch nur eine mit optischen Mitteln operirende Methode sein, mit welcher sich die photographische Aufnahme der stehenden Wellen verbinden lässt.

Einige, auf der die Stadt Rostock durchfliessenden Warnow, angestellte Versuche an noch grösseren Wellen mögen hier einen Platz finden.

Jeder das Wasser durchschneidende längere Körper, etwa ein Dampfschiff, erregt zwei schief zu seiner Cursrichtung nach beiden Seiten hin verlaufende Wellensysteme. Das Eine derselben besteht aus langen, weniger zahlreichen Wellen und wird vom Bug des Schiffes hervorgerufen. Das Zweite hat kürzere Wellen und rührt vom Hinterschiff her. Auf dieses System beschränkten sich die Messungen.

Die Richtung dieses Wellensystems wurde bestimmt durch Einvisirung zweier Marken, deren Entfernung 89 m betrug. Die Verbindungslinie dieser Marken war daher ein Wellenstrahl für die durchschnittliche Bewegungsrichtung eines Wellenzuges. Um die von Thomson eingeschlagene Methode zu verwerthen, fand zugleich mit der Beobachtung der Wellen auch die der Dampfergeschwindigkeit statt. Zu diesem Zweck wurde die Entfernung von drei in einer Gerade liegenden Schiffspfähle (D'Alben) gemessen. Sie betrug 269,5 m.

Während zwei Beobachter die Zeit bestimmten, welche der Dampfer zum Passiren der Pfähle gebrauchte, stellten zwei andere die Geschwindigkeit und Zahl der Wellen pro Secunde fest.

Nach einigen werthlosen Beobachtungen, glückten zwei Versuche bei absoluter Windstille und spiegelglattem Wasser in befriedigender Weise.

Tabelle XI.

Versuch	Dampfergeschwindigkeit v	Geschätzter Winkel der Wellen gegen die Cursrichtung α	$\sin \alpha$	Aus der Dampfergeschwindigkeit berechnete Wellengeschwindigkeit $v_1 = v \sin \alpha$	n pro Secunde beobachtet	λ beobachtet	Beobachtete Geschwindigkeit $v_2 = n\lambda$	λ_1 berechnet aus $\lambda_1 = \frac{2\pi n^2}{g}$	Berechnete Geschwindigkeit $v_2 = n\lambda_1$
	cm	α				cm	cm	cm	cm
1	391,5	34°	0,56	219	0,754	264,4	199,4	274,7	207,2
2	486,0	25°	0,42	204	0,629	379,7	238,8	394,8	248,3

Die aus dem Dampferfortgang berechneten Wellengeschwindigkeiten gaben einmal ein zu grosses, das andere Mal ein zu kleines Resultat. Der Fehler liegt in der Ungenauigkeit der Winkelschätzung, obgleich ziemlich ferne Objecte zur Peilung der Wellenrichtung benutzt wurden.

Beide Wellenlängen λ blieben nicht erheblich hinter den berechneten λ_1 zurück. Der Grund der Abweichung muss in der mangelnden Tiefe gesucht werden, denn Lothungen ergaben für den Weg der Welle nur eine Durchschnittstiefe von 132 cm, und da die Welle bei der zweiten Beobachtung an den Marken eine Amplitude von 8 cm zeigte, ist die Störung in dem Verhältnis $\frac{8}{132}$ zu suchen.

Nach Beobachtungen von Duhil de Benazé, und besonders von Antoine, scheinen die im Ocean auftretenden Wellen ebenfalls kürzer als die berechneten zu sein. Zu einem Vergleich können hier ihre Messungen nicht herangezogen werden, da sich dieselben auf Wellen von sehr grossen Dimensionen beziehen.

Zum Schluss ist noch zu bemerken, dass die Wellenerregung mittels schwingender Gabeln einen vergleichenden Untersuchungsweg bietet, zu den interessanten Forschungen van der Mensbrugge's [1]) über Spannungen in der Berührungsschicht zweier Flüssigkeiten. Die Auswerthung dieser Forschungsergebnisse würde von grosser Tragweite für die Probleme der Molecularphysik sein.

An dieser Stelle fühle ich mich gedrängt, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Matthiessen für seine bei der Ausführung der Versuche ertheilten Rathschläge meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

1) La Nature. 1888.

V. Literatur.

1804. Franz Gerstner. Neue Wellentheorie.
1809. Bremontoir. Recherches sur le mouvement des ondes. Paris.
1818. Poisson. Mémoire sur la théorie des ondes. Paris.
1820. Plana. Notes sur la théorie des ondes, donnée par Mr. de Poisson. (Accad. di Torino.)
1820. Bidone. Expériences sur la remous et sur la propagation des ondes. (R. Accad. di scienca.) Vol. 25.
1823. Poleni. Del moto misto dell' aqua. Bologna.
1825. E. und W. Weber. Wellenlehre auf Experimente gegründet. Leipzig. Gerhard Fleischer. Dies Werk enthält noch die Theorien und Arbeiten von Newton, Gravesande, d'Alembert, La Place, La Grange, Flauvergues und Brandes.
1827. Cauchy. Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide, Mém. pris par div. savants à l'Acad. de Sc. Paris.
1831. Emy. Du mouvement des ondes et des travaux hydrauliques. Paris.
1831. Faraday. Pogg. Ann. Bd. 26 S. 193.
1838. Virla. Du mouvement des ondes. (Ann. d. ponts et chaussées.)
1841. Siau. De l'action des vagues à des grandes profondeurs (Acad. de Sc.) Paris.
1843. Cauchy. Théorie de la propagation des ondes (Rec. de l'Acad. de Sc.)
1843. Caligny. Expériences ayant pour but etc. (Comptes rendus.)
1844. Scott Rusell. Report on waves. British Association. York 1844.
1845. Laurent. Observations sur les ondes liquides etc. (Comptes rendus.)
1845. Earnshaw. Cambridge Transactions.
1845. Lang. Height of Waves. (Nautical Magazine).
1845. Hagen. Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Abh. d. kgl. Akad. d. Wissensch. Berlin.
1846. Piddington. On the storm waves and storm currents of hurricanes. (Nautical Mag.)
1846. Stevenson. Account of the experiments upon the forces of waves. Report on the labours in Dover bay.
1846. Walker. Ocean Waves. (Naut. Mag.)
1847. Conti. Del moto undulatorio (Gior. E. di Scienza). Padova.
1847. Stokes. Theory of Waves. Phil. Mag. Bd. 30 p. 129 und 138.
1850. Moorsom. Wave gauge. Naut. Mag.
1850. Robertson. On the theory of waves (Abstr. Rog. Soc.)
1850. Stokes. On waves. Cambridge Transactions.
1850. Poppe. Zur Darstellung der Interferenzen in Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 79 S. 437.

1853. Poppe. Zur Darstellung der Interferenzen in Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 19 S. 223.
1857. Lissajous. Zusammenstellung von Schwingungen verschiedener Wellenlängen. Ann. der Chemie und Physik. (3) S. 51.
858. Holtzmann. Ueber die Wellenbewegung tropfbarer Flüssigkeiten. (Einladungsschrift der polytechnischen Schule. Stuttgart.)
1859. Hagen. Zur Theorie der Meereswellen. Pogg. Ann. Bd. 107 S. 283.
1860. Hirst. On ripples and their relation to the velocity of currents. Phil. Mag. (4) vol 21. p. 1—188.
1860. Hagen. Die Wellenform in einem Strom von unendlicher Breite und Tiefe. Berl. Monatsberichte S. 51.
1861. Hagen. Wellen auf Gewässern gleichförmiger Tiefe. Berl. Monatsberichte S. 1—79.
1862 u. 63. Bazin. Mémoire sur le remous et sur la propagation des ondes. Comptes rendus vol. 55 p. 353. ibid. Clapeyron vol. 57 p. 302.
1862. Froude. Transactions of the institution of naval architects vol. 3.
1863. Rankine. On the exact form of waves near the surface of deep water. Phil. Trans. of the Roy. Soc. vol. 153 p. 127.
1863. Rankine. Phil. Mag. (4) vol. 24 p. 420.
1866. Cialdi. Sul moto endoso del mare. Roma.
1868. Matthiessen Ludw., Akustische Versuche, die kleinsten Transversalwellen von Flüssigkeiten betr. Pogg. Ann. S. 107.
— Lissajous. Ueber die Interferenz von Flüssigkeitswellen. Compt. rend. Bd. 67 S. 1887 und Phil. Mag. (4) Bd. 36 S. 240.
— Maury. Fluth und Erdbebenwellen. Phil. Mag.
— Rankine On waves in liquids. Roy. Soc. vol. 16 p. 344. Phil. Mag. (4) vol. 36 S. 52.
1870. Poppe. Ueber die Interferenzerscheinungen und primären Gebilde freier und regelmässiger Wellensysteme tropfbarer Flüssigkeiten. Programm der höheren Gewerbeschule. Frankfurt a. M.
— Boussinesq. Théorie des ondes liquides périodiques. Mem. d. Sav. étrang. Bd. 20.
1871. Matthiessen Ludw., Ueber die Transversalschwingungen tönender, tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 141 S. 385.
— Thomson. Letters to Prof. Tait. Phil. Mag. p. 368—374.
— Boussinesq. Allgemeine Theorie der Wellen längs eines rechtwinkeligen Kanals. C. R. Bd. 72 S. 755. Bd. 73 S. 226. Liouv. Journ. Bd. 21, 13 S. 55 bis 108. Bd. 18 S. 47.
1873. Lissajous. Methode, um die Fortpflanzung der Wellen zu studiren Journ. de phys.
— Bertin. The experimental study of waves. Trans. of the Inst. of Nav. Arch.
1874. Bertin. Les Vagues et les Roulis. Mém. de Cherbourg, vol. 17 p. 209. vol. 15. p. 5 und 313. C. R. (78) p. 676.
— Imray. Ueber die gleichmässige Oscillationswelle. Proc. Roy. Soc. Bd. 22. S. 350.
— Tylor. On tides and waves. Phil. Mag. vol. 48 p. 204.
1875. Guieyesse. Ueber die Fortpflanzung der Fluthwellen in den Flüssigkeiten. Liouv. Journ. (3) S. 399.
— Decharme. Nouveau moyen de produire des vibrations et des interférences sur le mercure. Journ. de phys. p. 207. Pogg. Ergänzungsband 7 S. 176.

1876. Rayleigh. On waves. Phil. Mag. vol. 51 p. 257. vol. 52 p. 430.
1877. Giesen. Versuch einer mathematischen Darstellung der Flüssigkeitswellen. Zeitschrift für Mathematik. 1877 S. 138.
1878. Dubois. Transversalschwingungen von Flüssigkeiten. C. R. Bd. 86 S. 295 453. 652.
— Boussinesq. Wasserwellen. Liouv. Journal. (3) Bd. 4 S. 335.
1878. Rayleigh. Ueber fortschreitende Wellen. Proc. of. Lond. Math. Soc. Bd. 9 S. 21.
— Kolacek. Ueber den Einfluss des capillaren Oberflächendrucks auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wasserwellen. Pogg. Ann. (2) Bd. 5 S. 425.
— Woolley. On the theory of deep sea or oscillating waves. Trans. of the Inst. of Nav. Arch. vol. XIX.
1879. Franck. Ein Problem aus der Wellentheorie. Dissert. Rostock.
— Giesen. Oscillation einer homogenen Flüssigkeitsmasse infolge ihrer Oberflächenspannung. Zeitschr. für Mathematik.
1880. Lechat. Des vibrations à la surface des liquides. Ann. de chem. et phys. (5) vol. 19 p. 289. C. R. vol. 19 p. 1543.
— Kolacek. Ueber die Wellenbewegung schwerer Flüssigkeiten, welche in einem senkrechten Kreiscylinder eingeschlossen sind. Arch. mat. a fys. Bd. 2. S. 4. Beiblätter von Wiedemann S. 177.
— Bazzi. Ueber Flüssigkeitswellen. N. Cim. (3) Bd. 6 S. 98. Beiblätter Bd. 4 S. 14.
— Eustis. Methode, Wellen auf Quecksilber zu erregen. Proc. Boston Soc. (2) Bd. 7. Vergl. Fortschritte der Mathem. 1880 S. 270.
1883. Fehrmann. Ueber die Wellenbewegung einer tropfbaren Flüssigkeit. Dissert. Göttingen.
— Rayleigh. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. Phil. Mag. (16) p. 50.
— Kirchhoff. Vorl. über mathemat. Physik. Bd. 25 §§ 3 und 4.
1886. Tompson. On stationary waves in flowing water. Phil. Mag. (5) vol. 22 p. 353.
1887. Matthiessen Ludw. Ueber die Wanderung der Interferenzcurven. Wied. Ann. Bd. 32 S. 626.
1888. Ahrendt. Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz. Rep. d. Phys. Bd. 23 S. 318.
1889. Matthiessen Ludw. Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung auf Flüssigkeiten unter der Wirkung der Schwere und Cohäsion. Wied. Ann. Bd. 38 S. 1.

Rostock, 14. August 1889.

O. Riess.